

DES MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES À LA FINANCE QUANTITATIVE :

EVOLUTION RÉCENTE DES MODÈLES MATHÉMATIQUES
UTILISÉS PAR LES FINANCIERS

JEAN-FRANÇOIS BOULIER* ET CHRISTIAN GOURIÉROUX**

Commençons par un petit exercice. Dérivés, convexités, corrélations, temps d'arrêt, hessien, probit, hétéroscédastique, le langage mathématique poursuit sa diffusion dans le monde des financiers qui ont associé ces concepts à des produits ou des indicateurs financiers comme par exemple le bêta d'une action, l'option à barrière, le score d'un crédit, la volatilité des marchés, le gamma d'une option, un contrat d'échange de taux à terme allemand payé en francs, la duration du bilan d'une banque. Saurez-vous mettre en concordances les deux listes ? Si oui, bravo, vous avez gagné le prochain numéro de Quants (revue de la Direction de la Recherche et de l'Innovation). Si non, la lecture de cet article vous donnera quelques éclaircissements.

167

Dans un discours prononcé à l'occasion de la remise de la Médaille Fields, le lauréat Pierre Louis Lions, mathématicien appliqué de l'Université Paris Dauphine, a notamment indiqué «on voit apparaître des thèmes de recherche unificateurs, fédérateurs, comme la finance. Cela me semble extrêmement positif. Signe des temps, la communauté mathématique d'abord sollicitée ponctuellement par les chercheurs universitaires en finance, considère désormais la finance comme un thème à part entière. Un siècle après la révolution industrielle s'appuyant sur les sciences mécaniques et la thermo-dynamique, la révolution financière associée à l'essor des marchés de capitaux et à l'inventivité des instruments dérivés, s'appuie elle aussi sur les mathématiques.

Les modèles mathématiques utilisés par les praticiens de la finance sont innombrables : les intervenants des salles de marchés, les trésoriers, les gestionnaires de fonds, les ingénieurs financiers, sans oublier certaines directions générales, ne pourraient plus exercer leur activité sans eux. Ce développement est tout aussi fascinant que celui des produits des services

* Directeur de la Recherche et de l'Innovation du Crédit Commercial de France.

** Responsable du Laboratoire de Finance Assurance du Centre de Recherche en Économie et Statistiques.

et des nouvelles idées qu'ils ont fait naître : pouvoir acheter à la bourse sans risque en capital, acquérir le droit de choisir si l'on achète ou si l'on vend le franc après une consultation électorale, titriser des crédits, ne seraient pas envisageable sans recours à des systèmes d'information dans lesquels les modèles mathématiques ont une place déterminante. Là comme ailleurs, les technologies de l'information ont stimulé ce développement et permis le traitement des masses d'informations – principalement des prix – que les financiers digèrent tous les jours et aux quatre coins de la planète.

En acceptant de rendre compte des évolutions des mathématiques financières nous avons pris le risque de n'être ni totalement exhaustifs, ni tout à fait objectifs. Pour partager ces risques, nous avons choisi d'associer deux points de vue, l'un plus académique et l'autre plus praticien, pour traiter d'une passion et d'un métier qui nous rassemblent, à savoir l'adaptation du meilleur des mathématiques appliquées aux questions financières concrètes du moment. Aussi commencerons nous par évoquer l'évolution des besoins des utilisateurs et par préciser les enjeux des modèles dans la finance contemporaine. Nous tenterons ensuite d'analyser les traits communs des modèles mathématiques utilisés par les financiers sous différents angles.

168

I. Evolution des utilisations des mathématiques financières

Les institutions financières et les financiers des entreprises ont sensiblement accru leur consommation de mathématiques et pourtant, le terme «mathématiques financières» paraît aujourd'hui un peu désuet. En effet, on lui attache encore les nombreux calculs de taux d'intérêts ou de rente dont les tables financières que les actuaires fournissaient et dont ils étaient les spécialistes. Mais les marchés financiers et l'informatique ont notablement changé le paysage. La dernière en rendant pratiquement trivial le calcul précis d'un taux de rentabilité interne, les premiers en rendant caduque le cadre déterministe dans lequel s'effectuaient ces calculs. A quoi bon en particulier obtenir avec précision un taux de rendement interne qui suppose le réinvestissement des flux financiers, par exemple les coupons, à un taux connu d'avance alors que chacun peut suivre minute par minute sur les écrans qui diffusent les informations, la variation des taux et avoir ainsi la preuve du démenti des hypothèses.

Non, les métiers financiers utilisent désormais davantage des modèles mathématiques au sens large plutôt que des mathématiques financières au sens certes un peu étroit auquel nous venons de faire référence. D'ailleurs les institutions financières ne vivent pas dans un monde économique différent des autres industries. Elles doivent comprendre les besoins de leurs clients, leur fabriquer de bons produits quand c'est nécessaire, ou

leur acheter au meilleur prix quand il existe un marché. Elles doivent enfin bien gérer leurs finances ce qui se traduit en particulier par une gestion bilancielle adaptée à leur stratégie, et cela dans un environnement concurrentiel planétaire. L'utilisation des modèles mathématiques vise à donner à l'institution des moyens techniques à côté d'autres technologies, comme les télécommunications, et d'autres expertises, comme le droit, pour exercer dans des conditions compétitives ses métiers. A cet égard, les financiers sont utilisateurs de modèles mathématiques comme l'ensemble des acteurs économiques.

La modélisation mathématique aujourd'hui : un facteur de succès

En revanche, le point d'entrée des mathématiques dans les questions financières s'est incontestablement déplacé ces dernières années vers les modélisations des incertitudes et de ce que l'on dénomme en abusant sans doute un peu de ce terme, le risque. Il peut s'agir du risque de défaut des débiteurs, du risque de marché que l'on appelle également la volatilité, des incertitudes sur les marges d'intermédiations, des aléas liés aux comportements des clientèles. Ces différentes sources de risques sont désormais analysées avec des modèles statistiques, maîtrisées avec des techniques mathématiques relevant de la recherche opérationnelle et contrôlées par des procédures élaborées dans des cadres probabilistes. Grâce à des organisations diverses, les institutions financières se sont dotées de structures d'études très proches par nature des équipes de recherche développées que l'on rencontre dans l'industrie. Ces structures testent et choisissent les modèles appropriés en fonction des besoins ressentis, ou mieux, essaient d'anticiper les besoins de l'entreprise qui les abrite en contribuant à l'innovation, soit en proposant de nouvelles solutions à des problèmes mal traités, soit encore en permettant de traiter de nouveaux problèmes.

169

Il est sans doute banal de rappeler que les marchés sont volatils, en revanche, l'illusion est encore assez répandue selon laquelle il suffit de bonnes informations et d'un peu d'intelligence pour « battre le marché », c'est à dire anticiper ses mouvements, ou constituer des portefeuilles d'actions, ou d'obligations ayant des performances supérieures à la moyenne des titres d'une catégorie représentée par exemple par l'indice du marché. Force est de constater d'ailleurs que lorsque cela se produit, le niveau de risque pris est supérieur à l'indice... La modélisation financière s'appuyant sur les théories de l'efficience des marchés et la description des évolutions des cours par des représentations stochastiques ont contribué à rendre plus lucides les intervenants, investisseurs et intermédiaires financiers, vis à vis des risques qu'ils prennent. Dans ce contexte nous allons illustrer l'apport des modèles mathématiques dans différents domaines :

celui des services proposés aux clients en prenant l'exemple de la gestion quantitative, celui des produits financiers en considérant l'essor des produits dérivés, ceux enfin de la gestion financière des institutions au travers de la gestion actif-passif et la maîtrise des risques de marché.

Modèles mathématiques de la gestion quantitative

La gestion d'actifs pour compte de tiers occupe une place de choix dans les services offerts par les institutions financières au travers de la gestion et la commercialisation de fonds collectifs, pour laquelle la France est leader en Europe, et la gestion de fonds institutionnels. Les techniques de la gestion et l'offre de produits ont connu en France une évolution très sensible au début des années 90 sous l'impulsion de ce qui est appelé la gestion quantitative. Le produit de base de la gestion quantitative est un fonds indiciel, c'est à dire un fonds dont la composition est identique, ou du moins très semblable, à un indice d'actions ou d'obligations. Le premier fond de ce type avait été conçu par Wells Fargo en 1970 et l'adaptation du concept au marché français date de 1989. L'idée en est simple - puisqu'il est difficile de battre l'indice du marché, pourquoi ne pas tout simplement reproduire la performance ? De tels fonds «purs» peuvent alors être intégrés comme composantes de portefeuilles dans des stratégies d'investissement plus complexes, notamment en faisant varier les allocations entre les différents actifs, ce qui présente de l'intérêt pour la gestion institutionnelle. Si la reproduction de l'indice CAC 40 ne présente pas de difficultés particulières, les fonds indexés sur le SP 500 ou le Nikkei qui comprennent plusieurs centaines de titres utilisent des techniques statistiques (échantillonnage stratifié, minimisation de la variance de la performance relative) pour n'investir que dans un nombre plus réduit de titres.

170

Extension assez naturelle des fonds indiciels, des fonds dit indiciels tiltés visent à faire mieux que l'indice en maintenant un niveau de risque comparable. Ceci en pratique peut consister à surpondérer le portefeuille sur des titres pour lesquels la performance attendue est jugée supérieure à celle de l'indice en limitant les écarts statistiques à l'indice dans une fourchette de 2 à 4 %. C'est ici qu'entrent en scène les modèles mathématiques qui vont guider, voire dans certains cas imposer, la politique du gestionnaire. Plutôt que de faire un long exposé des multiples techniques, nous allons en présenter brièvement deux, l'une portant sur l'analyse du risque et l'autre sur la prévision de la surperformance, toutes les deux sont fondées sur des modèles économétriques multifactoriels.

Le modèle Barra CCF Actions Françaises, développé conjointement par la Société américaine de conseil en investissement Barra et l'équipe de recherche innovation du CCF, permet d'analyser et de contrôler le risque d'un portefeuille d'actions, volatilités et de volatilité relative (tracking-

error»). L'information financière et bilantielle d'un échantillon de 450 valeurs sert de base à l'analyse de la variance de rentabilités et rentabilités relatives. En termes économétriques, la rentabilité d'un titre particulier relative à l'indice d'un mois particulier est décomposée en somme de facteurs communs à tous les titres multiplié par la sensibilité du titre considéré au facteur. Par exemple la sensibilité du titre Danone au facteur capitalisation boursière est définie comme l'écart de la capitalisation de ce titre et la capitalisation moyenne de l'échantillon, divisé par l'écart type des capitalisations dans l'échantillon.

La rentabilité du facteur «capitalisation» pour un mois particulier est obtenue comme le résultat de la régression «en coupe instantanée» des rentabilités des titres sur les prédicteurs constitués par les sensibilités définies plus tôt. Après calibration par études empiriques, le modèle multifactoriel retient 8 facteurs financiers et 12 secteurs économiques qui sont reportés dans le tableau ci-joint. Son pouvoir explicatif est de 30 %, ce qui est l'ordre de grandeur obtenu par Barra sur les marchés financiers développés. En pratique les logiciels de Barra permettent au gestionnaire de consulter les expositions de son portefeuille aux différentes sources de risque répertoriées par le modèle et de vérifier que la variance du résidu absolu ou relatif reste dans des limites acceptables. Dans le cas contraire en faisant usage de diverses fonctionnalités il pourra par simulation modifier la composition du portefeuille jusqu'à l'obtention d'un profil de risque satisfaisant. Un tel outil de gestion quantitative peut à l'évidence être intégré par tous les gérants à des étapes diverses du processus d'investissement.

171

Facteurs de risque du modèle BARRA-CCF Actions Françaises

Facteurs financiers	Secteurs économiques
Capitalisation	Energie
Taux de dividende	Matériaux
Succès	Génie civil
Effet de levier	Biens durables
Valeur	Automobiles
Liquidité	Biens de consommation
Volatilité	Agroalimentaire
Intensité capitalistique	Distribution
	Holdings
	Finances
	Services
	Immobilier

Le même type de modélisation multifactorielle peut servir à prévoir les rentabilités à partir des mêmes informations mais, dans ce cas, c'est la rentabilité future que l'on cherche à déduire des informations disponibles présentes ou passées. La Sicav Paris Index Plus fait usage d'un tel modèle fondé sur des facteurs similaires quoique légèrement différents de ceux du tableau ci-dessus en prévoyant leurs évolutions futures au moyen d'un système adaptatif ; la technique statistique employée est fondée sur l'estimation bayésienne. Les gestionnaires de cette SICAV parient ainsi sur la permanence de facteurs rémunérés par le marché et d'inefficiencies momentanées du marché des actions, décelés par le modèle ; ils cantonnent toutefois le risque relatif à l'indice à 3 %. La performance de cette SICAV depuis son lancement en 1989 la place dans le premier quartile de sa catégorie.

Autre innovation, autre technique mathématique, les fonds garantis créés ces dernières années offrent aux particuliers — parfois aux institutions — des placements en actions, avec par exemple la sécurité de retrouver leur investissement initial. Deux catégories de fonds ont été vendus, des fonds fermés dans lesquels les souscripteurs investissent et désinvestissent à des dates déterminées, et des fonds ouverts dont les dates de souscription et de vente sont laissées au gré de l'épargnant. Ces fonds relèvent des méthodes d'assurance de portefeuille. Les modèles stochastiques sur lesquels s'appuient les disciplines d'allocation entre actions et titres monétaires sont identiques à ceux des produits dérivés que nous allons décrire maintenant.

172

Les processus stochastiques et l'essor des produits financiers dérivés

La formule de Black et Scholes et les travaux de Merton ont désormais plus de vingt ans et les instruments financiers dérivés, futures et options, sont devenus des produits industriels dont l'expansion est encore très soutenue tant en terme de volumes traités, d'encours, mais aussi d'innovation. C'est un cas d'école dans l'histoire économique et scientifique, d'adéquation entre les besoins des marchés et l'application voire l'extension de la recherche en probabilité. La formule date de 1973, peu de temps après la décision du flottement généralisé des monnaies, elle est contemporaine du premier choc pétrolier, événements qui ont apporté beaucoup de volatilité sur les marchés financiers domestiques qui se sont depuis 'internationalisés progressivement. Le besoin économique des produits dérivés s'est naturellement fait jour, pour permettre de réallouer des risques engendrés par les fluctuations économiques ou géopolitiques entre les différents acteurs financiers - ceux qui ne veulent pas prendre ces risques et ceux dont c'est la fonction de parier sur l'avenir dans l'espoir d'accroître la rentabilité de leurs investissements. Si le développement de

l'industrie des futures et autres contrats d'échange à terme n'a pas nécessité des applications mathématiques particulières (hormis le calcul des ratios de couvertures dans le cas de couvertures imparfaites) car le prix à terme se déduit aisément d'un raisonnement par arbitrage, les marchés des options n'auraient pas pu se développer sans la théorie probabiliste, celle-ci permet l'évaluation du prix de l'option et surtout la stratégie de duplication des contrats optionnels que l'on appelle la gestion en «delta neutre».

En deux mots, de quoi s'agit-il ? Après chaque intervalle de temps et mouvement de cours significatif, le vendeur d'une option d'achat sur un titre va acheter si le cours a monté ou vendre dans le cas contraire des titres en se finançant le cas échéant par un prêt jusqu'à la maturité de l'option. La théorie de Black et Scholes montre alors que le premium, évalué par leur formule, est la mise de fond requise par le vendeur d'option qui adopte la gestion en delta neutre pour pouvoir sans profit ni perte payer l'écart entre le prix du titre à la maturité (donc inconnu au départ) moins le prix d'exercice convenu au moment de la vente de l'option. La composition du portefeuille doit suivre le «delta» de l'option, défini comme la dérivée de la formule de Black et Scholes relativement au cours du titre, afin de réaliser une position financièrement équilibrée, c'est-à-dire que les petites variations du cours du titre n'affectent pas (au premier ordre) la position financière de celui qui duplique l'option. Ainsi la gestion en delta neutre apparaît-elle comme une technique de synthèse industrialisable et la formule de Black et Scholes en détermine le coût de revient.

Mathématiquement, des mouvements de cours sont modélisés par un processus stochastique limite continue des variables aléatoires formées par les mouvements de cours entre deux instants. Le calcul stochastique d'Ito et un raisonnement par arbitrage, montrent que la valeur de tout portefeuille géré en delta neutre suit une équation aux dérivées partielles linéaire. En dehors du cas simple où l'on obtient la fameuse formule, on peut résoudre cette dernière équation par des méthodes d'approximations numériques, dont la plus répandue s'appelle le modèle binomial de Cox Ross et Rubinstein. Des travaux probabilistes sur les «martingales» ultérieures ont ouvert la voie à d'autres techniques d'évaluation ramenant au calcul d'une espérance mathématique grâce au changement adéquat de densité de probabilité, qui s'interprète économiquement comme un changement d'unité comptable (numéraire).

Les nouvelles techniques ont à leur tour permis l'essor des options dites de deuxième génération, car les utilisateurs ont appris à formuler des besoins nouveaux comme une garantie de change portant pendant une période déterminée sur le cours moyen, sur le maximum ou sur le minimum du cours. Les vendeurs ont essayé de fabriquer des options «moins chères» comme des options à barrière, qui disparaissent lorsque le

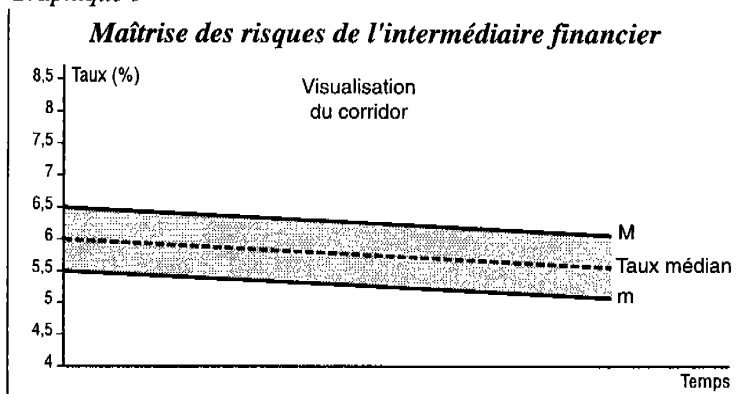
risque de perte pour leur détenteur a très nettement diminué. Ces instruments sont aujourd'hui régulièrement échangés de gré à gré et quelques banques se sont spécialisées dans leur conception, parfois sur mesure, en fonction des besoins spécifiques des entreprises clientes ou en fonction des situations particulières des marchés financiers.

À titre d'illustration, l'obligation corridor émise par la Compagnie Bancaire a été conçue par la Société Générale au début de l'année 93, à un moment où les taux d'intérêts à long et moyen terme étaient très bas (5,5 à 6 %) et où les investisseurs dans leur ensemble anticipaient une baisse graduelle des taux d'intérêt à court terme suite à la détente monétaire progressive orchestrée par les banques centrales européennes. Le coupon de cette obligation corridor est calculé en proportion d'un nombre de jours où le taux Pibor 3 mois se situe dans le corridor représenté sur la figure ci-dessous, proportion inconnue au moment de l'émission. Si les taux, conformément aux anticipations d'alors, étaient restés dans le corridor le coupon aurait été de 8 %... soit nettement plus que le taux correspondant à la maturité de l'obligation.

Les éléments qui viennent d'être détaillés s'agrègent dans une position globale dans le bilan des intermédiaires financiers. La concurrence aidant, ils doivent définir et mettre en oeuvre une politique de gestion des risques. Celle-ci conduit à protéger leurs marges de services des financiers contre les aléas non désirables ou bien au contraire à s'exposer en connaissance de cause à des risques, identifiés et mesurés. Quels sont (hormis les risques de fraude ou les risques opérationnels) les principaux risques auxquels ils peuvent être exposés ?

174

Graphique 1



Il s'agit du risque structurel de taux d'intérêt, du risque de défaut et des risques de marché au sens large. Le risque de taux structurel de l'intermédiaire trouve son origine dans les écarts de dates de règlement entre les contrats à l'actif et au passif, comme par exemple les dépôts à vue du passif d'une banque et les crédits qu'elle octroie ou des contrats d'assurance vie de capitalisation à taux garanti et les obligations détenues par l'assureur. La gestion actif-passif a précisément pour objectif d'analyser le risque de taux structuré, son impact sur les bilans et comptes de résultats dans le futur, et de proposer des stratégies de couverture ou d'exposition à la direction générale de l'institution, pour ensuite mettre en oeuvre celle qui a été retenue. La pratique de la gestion actif-passif fait naître de nouveaux besoins de modélisation, notamment celui du comportement des clients : dans quelle proportion ils rembourseront les crédits par anticipation quand les taux baisseront, ou quel sera le pourcentage d'entre eux qui rachèteront leur contrat d'assurance-vie à taux garanti quand les taux monteront ? Des questions analogues se posent pour une multitude de contrats inscrits au bilan des institutions financières comme les dépôts à terme, les Plans d'Épargne Logement : ils soutiennent des options de toutes sortes, prolongation notamment, abondement, transformation de taux fixe à taux variable. La gestion des expositions des institutions nécessite en outre des techniques de simulation aléatoires et certains établissements ont recours à l'optimisation statique ou dynamique.

175

Préoccupation plus ancienne mais non moins importante, la maîtrise de l'impact du défaut des débiteurs a stimulé dans les quinze dernières années l'emploi de méthodes statistiques de détermination de la probabilité de défaut prévisionnelle en fonction d'un ensemble réduit d'informations concernant le débiteur. Des techniques de scores sont ainsi mises en oeuvre pour le crédit aux particuliers - le score est très répandu pour le crédit revolving (la carte Aurore du Cetelem) par exemple. Son utilisation est moins répandue pour le crédit aux petites entreprises. En ce qui concerne le risque de crédit des contreparties financières, entreprises ou intermédiaires financiers, la notation des agences de rating s'apparente à un score et s'inscrit dans la rationalisation des expositions des acteurs aux risques de défaut, sous l'impulsion notable des autorités de tutelle des banques qui ont imposé un ratio de fonds propre, dénommé ratio Cooke.

Dans le même esprit, les autorités de marché et les mêmes autorités de tutelle visent désormais à mettre en place un ratio de capital pour les risques de marché pris par les opérateurs. Là encore modélisation statistique et simulations sont les principaux guides pour déterminer le coussin de capital suffisant pour éviter les faillites en chaîne provoquées par la chute d'un établissement. Ces préoccupations nouvelles rejoignent des

pratiques déjà courantes parmi certaines banques d'investissements, mais elles font naître d'autres besoins de modélisation, comme par exemple l'analyse des chocs dans les marchés, et l'analyse de leur effet d'entraînement - se traduisant par une corrélation plus forte en situation de crise.

Quelles mathématiques financières pour demain ?

Le virus des modèles mathématiques va-t-il se développer dans ce relativement nouveau secteur d'application ? Il y a de bonnes raisons de penser que oui, et que si les mathématiques ne font pas tout, comme les propagandistes de l'intelligence artificielle l'avait un peu rêvé, il sera bien difficile de s'en passer. Voici quelques indications des besoins futurs qui pourraient naître ou se confirmer dans le futur.

La modélisation micro économique des préférences des clients, qui est le prolongement des analyses marketing déjà courantes dans plusieurs établissements s'adressant à des clientèles larges et diversifiées, sera un élément très utile de conception de nouveaux produits ou de choix de gammes. En particulier en matière de choix intertemporels d'épargne, spécifiquement en matière de décision d'investissement est-ce que les fonctions d'utilité comme le critère d'espérance variance sont le bon critère d'optimisation à retenir ? La vogue des fonds garantis tend à montrer que ce n'est pas le cas.

176

Les choix de stratégie financière des entreprises sont susceptibles de connaître les mêmes tentatives de rationalisation. D'un point de vue scientifique de nombreux travaux questionnent très ouvertement et selon plusieurs angles, l'approche traditionnellement due à Modigliani et Miller selon laquelle la composition optimale du passif de la firme est indépendante de ses actifs et projets d'investissements industriels. D'autre part les réflexions sur la gestion du bilan dans les entreprises se font de plus en plus nombreuses.

La généralisation du recours à la capitalisation des cotisations en vue de la retraite ne manquera pas de stimuler les tentatives récentes de modélisation des choix de pilotage financier des fonds de pension, en cherchant des solutions, là encore grâce aux techniques de contrôle stochastique. En outre le «réglage» entre les régimes répartition et capitalisation pourrait relancer l'usage de modèles macro économiques intertemporels.

Enfin l'univers des dérivés financiers options continuant son expansion, ce sont les options de crédit et les options dites «réelles», c'est à dire qui considèrent le processus industriel comme un ensemble d'options de production, qui défieront demain les mathématiques en attendant pour plus tard peut être, les options sur tous les risques économiques auxquels sont soumis les entreprises -immobilier, liquidité, coût du travail ?- dans leurs complexités temporelles ou combinatoires.

II. Quelques aspects de modélisation

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent concernant les besoins et les développements en finance quantitative, les mathématiques s'introduisent à deux niveaux : celui de la formalisation des problèmes [la modélisation], qui facilite leur compréhension et les interprétations, et celui des techniques de calculs [simulations, calculs d'intégrales ou de solutions d'équations de valorisation]. C'est le premier aspect que nous allons développer, le second n'étant pas spécifique des Mathématiques Financières.

Les principes de modélisation mathématique et les techniques associées d'estimation, de prévision ou d'analyse numérique utilisés en Finance ne diffèrent pas sensiblement de ceux rencontrés dans d'autres domaines d'application [d'où l'importance d'une veille pour suivre les évolutions dans ces autres domaines]. Cependant diverses caractéristiques des problèmes financiers vont conduire à privilégier certaines approches. Quelles sont ces caractéristiques ?

— L'analyse des risques et surtout de leur hétérogénéité, que celle-ci soit temporelle [évolution de la volatilité des rendements d'actifs], ou individuelle [risque de défaut] ;

— le fait que la plupart des applications financières, qu'il s'agisse de problèmes de valorisation, de couverture ou de gestion quantitative de portefeuille, se ramènent à des problèmes de prévision des risques. Ce n'est que depuis peu que se développent des modèles plus structurels demandant une bonne compréhension des comportements individuels des agents et des liens de causalité entre les divers facteurs, en liaison avec la rédaction de contrats de gré à gré, la gestion du fonctionnement de marchés ou la compréhension d'écarts de prix qui en théorie de marchés parfaits ne devraient pas pouvoir exister.

— La nécessité de prendre en compte des aspects non linéaires. Cette question est particulièrement importante pour une étude de prix d'actifs dérivés [des options par exemple], dont, par construction les flux versés sont fonctions non linéaires du prix du sous-jacent.

— La grande prudence qu'il faut avoir dans l'utilisation des modèles et techniques mathématiques, les diverses erreurs commises n'étant pas de simples erreurs statistiques, mais ayant des conséquences financières directes. Il faut de ce fait donner une grande importance à la mesure des erreurs de spécification, de modélisation, aux indicateurs de suivi.

Modèles descriptifs — Modèles structurels

Nous avons noté que les problèmes financiers étant généralement des problèmes de prévision, ceux-ci sont essentiellement résolus au moyen de

modèles descriptifs. Le but de tels modèles est de fournir des approximations des risques ou des résumés de ceux-ci en fonction d'autres variables connues avant que ces risques ne se réalisent. Ce sont des indicateurs avancés, comme des prix observés aux dates antérieures dans le cas de modèles temporels, des facteurs de risques caractéristiques des individus permettant de constituer des classes de risques, pour les modèles individuels.

Certains aspects structurels sont cependant souvent introduits dans les modèles descriptifs précédents. L'illustration la plus classique concerne les études jointes de plusieurs prix d'actifs, où l'examen des données, par exemple celles de taux d'intérêt à divers termes, montre que ces évolutions ne sont pas indépendantes. Il est de ce fait naturel d'introduire des contraintes entre les paramètres et les formes de ces diverses évolutions. Certaines de ces contraintes peuvent être vues comme conséquences de conditions d'absence d'opportunité d'arbitrage. Une introduction adéquate de telles contraintes est une façon de fournir des réponses cohérentes sur les risques joints des divers actifs.

Description de l'hétérogénéité des risques

178

De façon naturelle la description des risques est effectuée par l'intermédiaire de formulations stochastiques. Celles-ci doivent permettre de résumer un ensemble de risques par quelques chiffres simples, dont il sera facile de suivre l'évolution et plus généralement de comparer entre eux. Dans le cas d'une analyse dynamique des valeurs de certains actifs financiers ; ce seront par exemple : la valeur anticipée [une moyenne conditionnelle], la variabilité de cette valeur [une variance conditionnelle], et les covariabilités, les valeurs de divers actifs n'évoluant pas indépendamment les unes des autres. Ainsi si on s'intéresse à un actif financier, le risque est dans les versions les plus simples résumé par deux chiffres [moyenne et variance] ; si on s'intéresse à deux actifs financiers, il l'est par cinq chiffres [deux rendements moyens, deux variabilités, une covariabilité]. Un tel ensemble cohérent de chiffres présente l'avantage de permettre de reconstituer le risque associé à tout portefeuille constitué à partir de ces deux actifs. Le rendement anticipé et la variabilité du rendement du portefeuille se déduisant par des formules simples de ces cinq chiffres. Des modèles ont évidemment été introduits pour permettre d'étudier comment ces divers résumés (et donc les risques sous-jacents) évoluent dans le temps et essaient de traiter ces résumés d'une façon la plus symétrique possible. Ce sont les modèles dits à volatilité stochastique, et en particulier les modèles ARCH.

Dans les exemples les plus simples, les risques individuels, essentiellement des risques de non paiement, sont eux résumés par un unique

chiffre, assimilé à une probabilité de défaut. Dans ce type de problème, les modèles expliqueront de quelle façon cette probabilité de défaut dépend des caractéristiques de l'individu, et comment elle se modifie dans le temps. Il s'agit de formulations pour expliquer une variable qualitative : le fait de tomber ou pas en défaut, dont les exemples les plus simples sont les modèles logit ou probit, à la base des déterminations de scores : scores de crédits ou de notations des émissions. Résumer le risque de défaut par un seul indicateur [un seul rating] est cependant trompeur. Une défaillance entraîne divers coûts (ou gains) aléatoires, et ceux-ci devraient plutôt être appréhendés par l'intermédiaire de leurs moyenne et variance. Les deux résumés apparus au niveau d'une étude dynamique des prix d'actifs financiers s'introduisent donc aussi naturellement pour une étude des risques individuels. En particulier la prise en compte de deux aspects peut naturellement conduire à ne plus pouvoir comparer de façons non ambiguës deux risques, donc à considérer avec prudence tout classement linéaire de risques ou de performances.

Finalement il est important de prendre en compte l'hétérogénéité possible de ces risques individuels. L'oubli de cet aspect conduit en effet à une sous-évaluation moyenne du risque correspondant, et à une différenciation insuffisante des tarifs, ce qui dans le cas de problèmes individuels conduit à faire subventionner les individus risqués pour ceux qui le sont moins.

179

Modèles paramétriques — Modèles semi-paramétriques

On insiste souvent dans les questions de modélisation sur la distinction entre des modèles où la loi (conditionnelle) du risque demande à être complètement spécifiée, à quelques paramètres inconnus près [modèles paramétriques], et des formulations où seuls sont spécifiés quelques moments [modèles dits semi-paramétriques, dont les exemples les plus classiques sont les modèles de régression]. De nombreux problèmes financiers demandent une spécification complète de la loi. C'est le cas des questions faisant intervenir des actifs dérivés comme des options, où la couverture et la valorisation de ces titres demande le calcul des espérances de flux [éventuellement après correction par probabilité risque-neutre] de la forme $(S_t - K)^+ = \text{Max}(S_t - K, 0)$, où S_t désigne le prix du sous-jacent et K le prix d'exercice. Comme les flux sont fonctions non linéaires du prix S_t , on ne peut calculer les espérances correspondantes pour divers prix d'exercice que si la loi complète de ce prix est connue. De façon simplifiée la bonne spécification des moyennes et variances conditionnelles (l'aspect semi-paramétrique) va permettre de classer partiellement les risques. La connaissance complète de la loi [l'aspect paramétrique] va permettre de les valoriser.

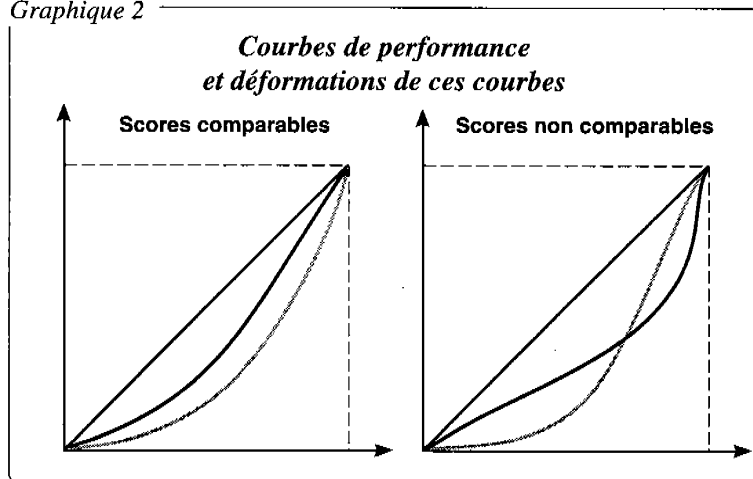
Instruments de suivi

Les modèles introduits ne doivent jamais être vus comme une description exacte de la réalité, mais comme des outils susceptibles d'apporter une information utile. Cette information est imparfaite, et cet aspect devrait systématiquement être mis en évidence en présentant les résultats ou les stratégies d'intervention ou de valorisation avec des degrés d'erreur résumant la plus ou moins grande qualité du modèle sous-jacent. Une prévision de prix d'option devrait ainsi être donnée sous forme d'une fourchette de prix, la largeur de cette fourchette donnant une idée du degré de prudence à avoir vis à vis de la prévision elle-même correspondant généralement au milieu de la fourchette. Cette largeur devrait intuitivement dépendre des caractéristiques de l'option : actif sur lequel elle est adossée, prix d'exercice, et de la situation générale du marché en particulier de sa volatilité.

De telles précautions ne sont cependant pas suffisantes. En effet les modèles et les techniques sont calibrés sur le passé et utilisés pour des interventions sur des périodes ultérieures. Or les situations de marché, les comportements des intervenants, peuvent changer et la qualité des modèles se détériorer. Il est donc utile d'introduire des instruments de suivi pour savoir si ces déformations sont ou non importantes, de disposer de méthodologies automatiques pour corriger des déformations légères. Au niveau de l'analyse des risques de défaillance individuels, les courbes de performance constituent de tels instruments. Une telle courbe donne pour chaque valeur du score s , la proportion de défauts constatée pour les «bons risques estimés» [ceux ayant un score inférieur à s] en fonction de la

180

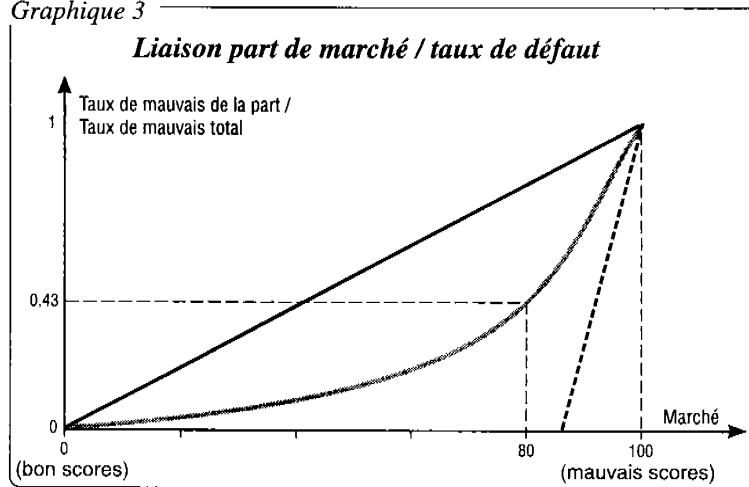
Graphique 2



proportion de ces bons risques. Lorsque s varie, on obtient une courbe qui, si le score a été bien déterminé, devrait être croissante convexe et le plus bas possible. Le suivi d'une telle courbe permet de détecter diverses déformations du score : perte de qualité, lorsque la courbe devient plus haute, mauvais classement des risques, lorsque la convexité est perdue...

L'exemple de ces courbes montre d'ailleurs que les risques peuvent être suivis par des résumés a priori plus sophistiqués que les deux seules moyenne et variance. Bien que mathématiquement plus complexes, ils restent cependant très simples d'emploi. Ils permettent en effet d'associer à toute part de marché un taux de défaillance, donc de voir clairement dans quelle mesure une augmentation de cette part contribue à détériorer le risque.

Graphique 3



181

Un autre exemple classique d'indicateur de suivi concerne l'analyse dynamique de prix et est fourni par l'analyse jointe de volatilités empiriques et de volatilités implicites, à condition d'interpréter de façon adéquate les écarts constatés entre ces courbes et surtout les modifications de ces écarts.

Finalement il faut noter qu'il est souvent utile de conserver en concurrence plusieurs modèles imparfaits, comme par exemple un modèle précis, mais peu robuste [i.e., se déformant rapidement], et un modèle moins précis, mais à déformation lente. Ce dernier modèle souvent très simplifié sert de référence, notamment pour déceler les déformations du premier. Ceci explique par exemple l'intérêt de conserver des approches actuarielles en parallèle avec des méthodes plus sophistiquées.

Conclusion

L'introduction importante des modèles et techniques mathématiques en Finance est intimement liée aux développements des marchés et surtout à la transformation de leurs modes de fonctionnement. Elle est ainsi apparue nécessaire pour permettre une automatisation accrue, qui impose des délais de réponse plus courts, qu'il s'agisse du traitement des transactions, des accords de crédits ou de la mise en place de «Banques directes». Il est tout à fait remarquable que de tels changements technologiques aient pu se produire en moins d'une dizaine d'années et ceci a révélé de fortes capacités d'adaptation des marchés, des organismes financiers et des institutions d'enseignement. Comment continuer à utiliser celles-ci au mieux ?

Il est d'abord clair que cette première phase, comme pour toute «révolution» technologique, a été un peu brouillonne. Il reste souvent difficile de distinguer ce qui relève de la recherche théorique de ce qui est susceptible d'applications pratiques, de comprendre que certaines techniques n'ont vocation qu'à être utilisées de façon transitoire, par exemple pour pallier certains manques de base de données, de séparer parmi les nombreux actifs dérivés envisagés ceux qui correspondent à des besoins de ceux qui sont plus proches du «gadget»,... Il faut que les mathématiques financières et leurs utilisations atteignent leur maturité. Elle doivent fondamentalement avoir pour but d'aider à diminuer les risques, de permettre la création de marchés ou leur développement en évitant les évolutions erratiques. Il serait de ce point de vue utile de réfléchir à des formations plus orientées recherche-développement, et qui insistent plus sur ces objectifs, à la mise en place d'incitations conduisant à utiliser ces techniques pour bien maîtriser les risques liés à l'activité économique et financière, et en tenant plus compte des «fondamentaux» de l'économie...

Nous avons noté que jusqu'à maintenant les méthodes avaient essentiellement été vues comme permettant d'effectuer des prévisions, et que dans ce but elles n'essayaient pas de comprendre et de décrire le comportement des agents. Il est vraisemblable que les dix prochaines années verront une réorientation beaucoup plus structurelle et proche de l'individu de ces techniques. Elle devront répondre alors à des questions de types assez différents comme :

— Quels sont les besoins de la clientèle ? Comment construire une gamme de produits cohérente pour répondre au mieux à ces besoins ?

— Comment rédiger de façon adéquate les contrats, quelles options cachées ou non y introduire pour faire se révéler au mieux les risques des acheteurs ?

— Comment différencier les tarifs de façon à prendre en compte les volumes échangés, les qualités des acheteurs et vendeurs ?